# Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Studierende der Informatik

Vorlesung 11

# Stetige Zufallsvariablen

**Definition 3.1.** Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *stetige Zufallsvariable*, falls es eine integrierbare, nicht negative reelle Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

gibt mit der Eigenschaft

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

$$\boxed{\Longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1}$$

Die Funktion

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{R} & \to & [0,1] \\ & x & \mapsto & P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \end{array}$$

heißt *Verteilungsfunktion* von $X$, die Funktion $f$ heißt *Dichte* der Zufallsvariablen $X$.

**Falls $f$ im Punkt $x$ stetig ist, gilt $F'(x) = f(x)$.**

# Stetige Zufallsvariablen

**Definition 3.6.** (a) Ist $X$ eine stetige Zufallsvariable mit der Dichtefunktion $f$, so heißt

$$E(X) := \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

der *Erwartungswert* von $X$.

(b) Ist $X$ eine stetige Zufallsvariable mit der Dichtefunktion $f$ derart, dass $E(X^2)$ existiert, so definiert man die *Varianz* durch

$$Var(X) := \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx.$$

$\sigma = \sigma_X = \sqrt{Var(X)}$ heißt *Standardabweichung* von $X$.

**Alles was Sie über $E(X)$ und $Var(X)$ wissen wenn $X$ diskret ist, gilt auch wenn $X$ stetig ist!**

$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$, $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$, **Tschebyscheff, …**

# Normal-Verteilung

**Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ mit**

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

**ist eine Dichtefunktion.**

**Standardnormalverteilung**

**Es gilt tatsächlich** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \mathrm{d}x = 1$**.**

**Definition 3.8.** Eine stetige Zufallsvariable heißt *normal-verteilt* mit den Parametern $\mu$ und $\sigma$ (kurz: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$), wenn die Dichtefunktion folgende Gestalt hat:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right).$$

Wir sagen kurz: $X$ ist $N(\mu, \sigma^2)$-verteilt. Die Dichtefunktion aus Beispiel 3.4 ergibt sich mit $\sigma = 1$ und $\mu = 0$; die $N(0,1)$-Verteilung heißt *Standardnormalverteilung*.

# Normal-Verteilung

**Definition 3.8.** Eine stetige Zufallsvariable heißt *normal-verteilt* mit den Parametern $\mu$ und $\sigma$ (kurz: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$), wenn die Dichtefunktion folgende Gestalt hat:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right).$$

Wir sagen kurz: $X$ ist $N(\mu, \sigma^2)$-verteilt. Die Dichtefunktion aus Beispiel 3.4 ergibt sich mit $\sigma = 1$ und $\mu = 0$; die $N(0,1)$-Verteilung heißt *Standardnormalverteilung*.

**Es gilt tatsächlich** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) \mathrm{d}x = 1$**.**

$f(x)$ **ist symmetrisch um** $\mu$**. D.h.:** $f(\mu - a) = f(\mu + a)$ **für alle** $a \in \mathbb{R}$**.**

$f(x)$ **nimmt das Maximum an, wenn** $x = \mu$**.**

# Normal-Verteilung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) \mathrm{d}x = 1$$

**Satz 3.9.** *Ist X $N(\mu, \sigma^2)$-verteilt, so gilt*

$$E(X) = \mu, \qquad Var(X) = \sigma^2 .$$

**Bemerkungen 3.10.** Ist $X$ $N(0,1)$-verteilt ($X \sim N(0,1)$), so bezeichnet man üblicherweise die zugehörige Verteilungsfunktion mit $\phi$, d.h.

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{1}{2}\, t^2\right)\, dt \, .$$

**Nicht elementar! D.h.: es gibt keine „einfachere“ Beschreibung!**

**Substitution:**

$$\int_{-\infty}^{t_0} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\frac{t_0-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) \mathrm{d}t = \Phi\left(\frac{t_0-\mu}{\sigma}\right)$$

**Also gilt für $X \sim N(\mu, \sigma)$:** $\qquad F(t_0) = P(X \le t_0) = \Phi\left(\frac{t_0-\mu}{\sigma}\right)$.

# Normal-Verteilung

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) \mathrm{d}t$$

## Tabelle mit den Werten der Verteilungsfunktion $\phi$ der Standardnormalverteilung

| $x$ | $\phi(x)$ | $x$ | $\phi(x)$ | $x$ | $\phi(x)$ | $x$ | $\phi(x)$ | $x$ | $\phi(x)$ | $x$ | $\phi(x)$ | $x$ | $\phi(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | 0,5000 | 0,53 | 0,7019 | 1,06 | 0,8554 | 1,59 | 0,9441 | 2,12 | 0,9830 | 2,65 | 0,9960 | 3,18 | 0,99926 |
| 0,01 | 0,5040 | 0,54 | 0,7054 | 1,07 | 0,8577 | 1,60 | 0,9452 | 2,13 | 0,9834 | 2,66 | 0,9961 | 3,19 | 0,99929 |
| 0,02 | 0,5080 | 0,55 | 0,7088 | 1,08 | 0,8599 | 1,61 | 0,9463 | 2,14 | 0,9838 | 2,67 | 0,9962 | 3,20 | 0,99931 |
| 0,03 | 0,5120 | 0,56 | 0,7123 | 1,09 | 0,8621 | 1,62 | 0,9474 | 2,15 | 0,9842 | 2,68 | 0,9963 | 3,21 | 0,99934 |
| 0,04 | 0,5160 | 0,57 | 0,7157 | 1,10 | 0,8643 | 1,63 | 0,9485 | 2,16 | 0,9846 | 2,69 | 0,9964 | 3,22 | 0,99936 |
| 0,05 | 0,5199 | 0,58 | 0,7190 | 1,11 | 0,8665 | 1,64 | 0,9495 | 2,17 | 0,9850 | 2,70 | 0,9965 | 3,23 | 0,99938 |
| 0,06 | 0,5239 | 0,59 | 0,7224 | 1,12 | 0,8686 | 1,65 | 0,9505 | 2,18 | 0,9854 | 2,71 | 0,9966 | 3,24 | 0,99940 |
| 0,07 | 0,5279 | 0,60 | 0,7258 | 1,13 | 0,8708 | 1,66 | 0,9515 | 2,19 | 0,9857 | 2,72 | 0,9967 | 3,25 | 0,99942 |
| 0,08 | 0,5319 | 0,61 | 0,7291 | 1,14 | 0,8729 | 1,67 | 0,9525 | 2,20 | 0,9861 | 2,73 | 0,9968 | 3,26 | 0,99944 |
| 0,09 | 0,5359 | 0,62 | 0,7324 | 1,15 | 0,8749 | 1,68 | 0,9535 | 2,21 | 0,9865 | 2,74 | 0,9969 | 3,27 | 0,99946 |
| 0,10 | 0,5398 | 0,63 | 0,7357 | 1,16 | 0,8770 | 1,69 | 0,9545 | 2,22 | 0,9868 | 2,75 | 0,9970 | 3,28 | 0,99948 |
| 0,11 | 0,5438 | 0,64 | 0,7389 | 1,17 | 0,8790 | 1,70 | 0,9554 | 2,23 | 0,9871 | 2,76 | 0,99711 | 3,29 | 0,99950 |
| 0,12 | 0,5478 | 0,65 | 0,7422 | 1,18 | 0,8810 | 1,71 | 0,9564 | 2,24 | 0,9875 | 2,77 | 0,99720 | 3,30 | 0,99952 |
| 0,13 | 0,5517 | 0,66 | 0,7454 | 1,19 | 0,8830 | 1,72 | 0,9573 | 2,25 | 0,9878 | 2,78 | 0,99728 | 3,31 | 0,99953 |
| 0,14 | 0,5557 | 0,67 | 0,7486 | 1,20 | 0,8849 | 1,73 | 0,9582 | 2,26 | 0,9881 | 2,79 | 0,99736 | 3,32 | 0,99955 |
| 0,15 | 0,5596 | 0,68 | 0,7518 | 1,21 | 0,8869 | 1,74 | 0,9591 | 2,27 | 0,9884 | 2,80 | 0,99744 | 3,33 | 0,99957 |
| 0,16 | 0,5636 | 0,69 | 0,7549 | 1,22 | 0,8888 | 1,75 | 0,9599 | 2,28 | 0,9887 | 2,81 | 0,99752 | 3,34 | 0,99958 |
| 0,17 | 0,5675 | 0,70 | 0,7580 | 1,23 | 0,8907 | 1,76 | 0,9608 | 2,29 | 0,9890 | 2,82 | 0,99760 | 3,35 | 0,99960 |
| 0,18 | 0,5714 | 0,71 | 0,7612 | 1,24 | 0,8925 | 1,77 | 0,9616 | 2,30 | 0,9893 | 2,83 | 0,99767 | 3,36 | 0,99961 |
| 0,19 | 0,5754 | 0,72 | 0,7642 | 1,25 | 0,8944 | 1,78 | 0,9625 | 2,31 | 0,9896 | 2,84 | 0,99774 | 3,37 | 0,99962 |

$$\Phi(-x) + \Phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) \mathrm{d}t = 1 \qquad \Longrightarrow \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

# Normal-Verteilung

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) \mathrm{d}t$$

**Beispiel NV: Ein Werkstück soll eine Bohrung erhalten mit einem Durchmesser von $50$mm. Die Toleranzgrenzen sind $t_u = 49{,}97$mm und $t_o = 50{,}04$mm. Es sei bekannt, dass die von den Bohrautomaten erstellten Bohrungen $N(\mu, \sigma^2)$ verteilt sind, wobei $\mu = 50$mm und $\sigma = 0.02$mm gelten soll. Ein Werkstück ist Ausschuss, wenn der Durchmesser größer als $t_o$ ausfällt. Ist der Durchmesser kleiner als $t_u$, so muss eine Nachbohrung durchgeführt werden.**

**(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Werkstück in den Toleranzgrenzen liegt?**

Sei $X$ die zugehörige Zufallsvariable. Dann ist folgender Wert gesucht

$$\begin{aligned} P(t_u \leq X \leq t_o) &= P(X \leq t_o) - P(X \leq t_u). \\ &= \Phi\left(\frac{t_o - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{t_u - \mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi(2) - \Phi(-1{,}5) = \Phi(2) - (1 - \Phi(1{,}5)) \\ &\approx 0.9104 \end{aligned}$$

# Normal-Verteilung

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) \mathrm{d}t$$

**Beispiel NV: Ein Werkstück soll eine Bohrung erhalten mit einem Durchmesser von $50$mm. Die Toleranzgrenzen sind $t_u = 49{,}97$mm und $t_o = 50{,}04$mm. Es sei bekannt, dass die von den Bohrautomaten erstellten Bohrungen $N(\mu, \sigma^2)$ verteilt sind, wobei $\mu = 50$mm und $\sigma = 0.02$mm gelten soll. Ein Werkstück ist Ausschuss, wenn der Durchmesser größer als $t_o$ ausfällt. Ist der Durchmesser kleiner als $t_u$, so muss eine Nachbohrung durchgeführt werden.**

**(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Werkstück nachgebessert werden muss?**

Sei $X$ die zugehörige Zufallsvariable. Dann ist folgender Wert gesucht

$$P(X \leq t_u)$$

$$= \Phi\left(\frac{t_u - \mu}{\sigma}\right) = \Phi(-1{,}5) = 1 - \Phi(1{,}5)$$

$$\approx 0.0668$$

# Normal-Verteilung

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \,.\, \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) \mathrm{d}t$$

**Beispiel NV: Ein Werkstück soll eine Bohrung erhalten mit einem Durchmesser von $50$mm. Die Toleranzgrenzen sind $t_u = 49{,}97$mm und $t_o = 50{,}04$mm. Es sei bekannt, dass die von den Bohrautomaten erstellten Bohrungen $N(\mu, \sigma^2)$ verteilt sind, wobei $\mu = 50$mm und $\sigma = 0.02$mm gelten soll. Ein Werkstück ist Ausschuss, wenn der Durchmesser größer als $t_o$ ausfällt. Ist der Durchmesser kleiner als $t_u$, so muss eine Nachbohrung durchgeführt werden.**

**(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Werkstück Ausschuss ist?**

Sei $X$ die zugehörige Zufallsvariable. Dann ist folgender Wert gesucht

$$\begin{aligned} P(X \geq t_o) &= 1 - P(X \leq t_0) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{t_o - \mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi(2) \\ &\approx 0.0228 \end{aligned}$$

**Alternativ: Es muss gelten $P(X \leq t_u) + P(t_u \leq X \leq t_o) + P(X \geq t_o) = 1$.**

# Normal-Verteilung

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) \mathrm{d}t$$

**Bemerkung 3.13.** Häufig ist man an der Wahrscheinlichkeit interessiert, dass die $N(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariable Werte in einem zu $\mu$ symmetrischen Intervall $[\mu - k\sigma, \mu + k\sigma]$ mit $k \in \mathbb{N}$ annimmt. Es ist üblich, die Abweichung von $\mu$ in Einheiten von $\sigma$ anzugeben. Deshalb spricht man vom *$k\sigma$-Intervall*. Wir erhalten

$$P\big(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma\big) = \phi(k) - \phi(-k) = 2\phi(k) - 1 \ .$$

Speziell für $k = 1, 2, 3$ ergeben sich folgende Werte

$$P(\mu - 1 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 1 \cdot \sigma) = 2\phi(1) - 1 \approx 0.6826 \ ,$$

$$P(\mu - 2 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 2 \cdot \sigma) = 2\phi(2) - 1 \approx 0.9544 \ ,$$

$$P(\mu - 3 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 3 \cdot \sigma) = 2\phi(3) - 1 \approx 0.9974 \ .$$

Also liegen ca. 68 % der beobachteten Werte bei einer $N(\mu, \sigma^2)$-verteilten Zufallsvariablen zwischen $\mu - \sigma$ und $\mu + \sigma$, ca. 95 % liegen zwischen $\mu - 2\sigma$ und $\mu + 2\sigma$ und ca. 99.7 % liegen zwischen $\mu - 3\sigma$ und $\mu + 3\sigma$.

# Grenzwertsätze

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) \mathrm{d}t$$

**Definition 4.1.** a) Ist $X$ eine Zufallsvariable mit dem Erwartungswert $\mu = E(X)$ und der Varianz $\sigma^2 = Var(X) > 0$, so gilt für die Zufallsvariable

$$X^* := \frac{X - \mu}{\sigma}$$

nach den Sätzen 2.12 und 2.16

$$E(X^*) = 0 \qquad \text{und} \qquad Var(X^*) = 1\,.$$

$X^*$ heißt die zu $X$ gehörende *standardisierte Variable.*

b) Zwei Zufallsvariable $X$ und $Y$ auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ heissen *gleichverteilt* oder *identisch verteilt*, wenn ihre Verteilungsfunktionen übereinstimmen.

$a, b \in \mathbb{R}$: $E(aX + b) = aE(X) + b$ **und** $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$

$$a \leq X^* \leq b \iff \sigma a \leq X - \mu \leq \sigma b \iff \sigma a + \mu \leq X \leq \sigma b + \mu$$

# Grenzwertsätze

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, . \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) \mathrm{d}t$$

**Binomialverteilung reloaded:**

**Ist $X_n$ binomialverteilt mit $n$ und $p$, so ist $P(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} = B_{n,p}(k)$**

**und die Werte von $X_n$ sind genau die Elemente aus $\{0,\ldots,n\}$.**

**Dann ist $X_n^* = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$**

**und die Werte von $X_n^*$ sind die Elemente aus $\left\{ \dfrac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}} \,|\, k \in \{0,\ldots,n\} \right\}$.**

**Wir wollen die Wahrscheinlichkeiten von $X_n^*$ als Flächeninhalt einer Säule darstellen.**

**Die Breite einer Säule ist $\dfrac{1}{\sqrt{np(1-p)}}$. Damit der Flächeninhalt gleich $B_{n,p}(k)$ ist, muss**

**die Höhe einer Säule gleich $\sqrt{np(1-p)} \cdot B_{n,p}(k)$ sein.**

**Die Treppenfunktion, die über alle diese Säulen läuft, ist**

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{np(1-p)} \cdot B_{n,p}(k) & \textbf{falls } \dfrac{k-np-\frac{1}{2}}{\sqrt{np(1-p)}} \le x < \dfrac{k-np+\frac{1}{2}}{\sqrt{np(1-p)}} \\ 0 & \textbf{sonst} \end{cases}$$

# Grenzwertsätze

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) \mathrm{d}t$$

**Binomialverteilung reloaded:**

**Ist $X_n$ binomialverteilt mit $n$ und $p$, so ist**

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = B_{n,p}(k)$$

**und die Werte von $X_n$ sind genau die Elemente aus $\{0, \ldots, n\}$.**

**Dann ist $X_n^* = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$**

**und die Werte von $X_n^*$ sind die Elemente aus**

$$\left\{\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}} \,\middle|\, k \in \{0, \ldots, n\}\right\}.$$

**Wir wollen die Wahrscheinlichkeiten von $X_n^*$ als Flächeninhalt einer Säule darstellen.**

**Die Breite einer Säule ist $\dfrac{1}{\sqrt{np(1-p)}}$. Damit der Flächeninhalt gleich $B_{n,p}(k)$ ist, muss die Höhe einer Säule gleich $\sqrt{np(1-p)} \cdot B_{n,p}(k)$ sein.**

**Die Treppenfunktion, die über alle diese Säulen läuft, ist**

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{np(1-p)} \cdot B_{n,p}(k) & \textbf{falls } \dfrac{k-np-\frac{1}{2}}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x < \dfrac{k-np+\frac{1}{2}}{\sqrt{np(1-p)}} \\ 0 & \textbf{sonst} \end{cases}$$

**Es ist** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} B_{n,p}(k) = 1 \implies$ $f_n$ **ist eine Dichtefunktion!**

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

# Grenzwertsätze

**Binomialverteilung reloaded:**

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) \mathrm{d}t$$

**Satz 4.3** (Satz von de Moivre-Laplace). *Es sei* $0 < p < 1$ *und* $X_n$ $B(n,p)$*-verteilt sowie* $X_n^*$ *die zu* $X_n$ *gehörende standardisierte Zufallsvariable. Dann gilt für alle* $a < b$*:*

$$\lim_{n\to\infty} P(a \leq X_n^* \leq b) = \phi(b) - \phi(a) \ ,$$

*wobei* $\phi$ *(wie üblich) die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet.*

**Es folgt:**

**Ist $X$ eine $B(n,p)$-verteilte Zufallsvariable, dann gilt**

$$P(X \leq x) \approx \Phi\left(\frac{x - np + \frac{1}{2}}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

**Faustregel: gute Approximation, wenn $np(1-p) > 9$.**

# Grenzwertsätze

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \,.\, \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) \mathrm{d}t$$

$X$ **ist** $B(n,p)$**-verteilt:** $P(X \leq x) \approx \Phi\left(\dfrac{x - np + \frac{1}{2}}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$

**In einem Kurs sind 220 Studierende angemeldet. In dem Hörsaal sind 160 Plätze. Studierende erscheinen mit einer Wahrscheinlichkeit von $0{,}75$ zu einer Vorlesung. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Platz ausreicht?**

Sei $X$ die Zufallsvariable, die die Anzahl von Studierenden in einer Vorlesung misst. Dann ist $X$ binomialverteilt, mit $n = 220$ und $p = 0{,}75$.

**Gesucht:** $P(X \leq 160)$

**Faustregel erfüllt:** $np(1-p) = 220 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25 = 41{,}25 > 9$

**Es folgt:** $P(X \leq 160) \approx \Phi\left(\dfrac{160 - 165 + 0{,}5}{\sqrt{41{,}25}}\right) = \Phi(-0{,}7006\ldots)$

$$= 1 - \Phi(0{,}7006\ldots) \approx 1 - 0{,}758 = 0{,}242$$

**Genaues Ergebnis mit Binomialverteilung:** $0{,}2397\ldots$

# Grenzwertsätze

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} . \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) \mathrm{d}t$$

$X$ **ist** $B(n,p)$**-verteilt:** $P(X \le x) \approx \Phi\left(\frac{x - np + \frac{1}{2}}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$

**In einem Hörsaal sind 160 Plätze. Studierende erscheinen mit einer Wahrscheinlichkeit von $0{,}75$ zu einer Vorlesung. Wie viele Studierende dürfen angenommen werden, damit der Platz mit einer Wahrscheinlichkeit von $0{,}95$ ausreicht?**

Sei $X$ die Zufallsvariable, die die Anzahl von Studierenden in einer Vorlesung misst. Dann ist $X$ binomialverteilt, mit unbekanntem $n$ und $p = 0{,}75$.

**Gesucht:** größtes $n \in \mathbb{N}$, mit $P(X \le 160) \ge 0{,}95$

$P(X \le 160) \approx \Phi\left(\frac{160 - n \cdot 0{,}75 + 0{,}5}{\sqrt{n \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25}}\right)$ **und** $\Phi(1{,}64) < 0{,}95$ **und** $\Phi(1{,}65) > 0{,}95$

**Löse:** $\frac{160 - n \cdot 0{,}75 + 0{,}5}{\sqrt{n \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25}} = 1{,}65$ **(Quadratische Gleichung in $\sqrt{n}$)** $\boxed{n = 200{,}51\ldots}$

**Fazit:** Es dürfen höchstens $200$ Studierende angenommen werden.